

Grundlagen zur Bildverarbeitung von Rastergrafiken (Begriffe, Berechnungsformeln, Farbarithmetik)

Dietmar Grätzer

27. Juli 2010

Es werden aus dem Bereich der Bildverarbeitung die wesentlichen Begriffe der Rastergrafik erläutert sowie formel- und einheitenmäßig festgelegt. Dabei wird unterschieden zwischen Eingabe-, Verarbeitungs- und Ausgabegeräten. Eine Formelsammlung ermöglicht, wichtige Kenngrößen eines Bildes oder eines verarbeitenden Gerätes aus Herstellerangaben rechnerisch nachzuvollziehen. Auf die wesentlichen Farbmodelle wird eingegangen und arithmetische Beziehungen hergestellt. Praktische Beispiele werden ausführlich diskutiert und durchgerechnet.

Allgemeine Begriffe

- Im Gegensatz zur **Vektorgrafik** besteht eine **Rastergrafik** aus einer rasterförmigen Anordnung von Bildelementen, den sogenannten **Pixeln** (Kunstwort aus picture elements). Man spricht daher auch von Pixelgrafik oder auch von Bitmap-Grafik. Rastergrafiken benötigen einen höheren Speicherbedarf als Vektorgrafiken. Rastergrafiken eignen sich besonders zur Darstellung von komplexen Bildern z.B. Fotos, die mit Vektorgrafiken nicht dargestellt werden können.
- Die **Bildauflösung** ist eine wesentliche Eigenschaft eines digitalen Bildes. Sie beschreibt die Zerlegung eines Bildes in einzelne Punkte oder Elemente in einem vorgegebenen Raster. Bezeichnungen und Begriffe sind geräteabhängig (Eingabegeräte, Bearbeitungsgeräte, Anzeigegeräte).
- In einer Digitalkamera oder einem Scanner als Eingabegeräte wird ein reales Bild in **Signalpunkte** (samples) zerlegt, mit den Meßgrößen: **samples per inch (spi)**, Einheit: 1/inch) oder **Punktabstand**, Einheit: μm . Dabei erfassen Fotosensoren (APS, CCD) nur Helligkeitswerte. Die Farbinformation (Rot, Grün, Blau) erfolgt über einen aufgebrauchten Filter (Bayer-Sensor).
- Signalpunkte werden durch Interpolation mit den Nachbarpunkten zu **Pixeln** (kleinste Informationseinheit eines Bildes) zusammengesetzt. Je nach **Farbtiefe (in bit per pixel)** wird ein Pixel z.B. mit 3 Bytes (24 bit) Speicherbedarf auf einem Speichermedium (SD-Karte, Arbeitsspeicher) gespeichert. Zusammen mit dem Dateiformat (z.B. JPEG, TIFF), das die Reihenfolge der Pixelanordnung (zeilenweise oder zickzackartig) festlegt, ist ein Pixel vollständig durch Position und Farbe festgelegt. Die Anzahl der Pixel bestimmt den Speicherbedarf der Bilddatei. Die Angabe einer "Pixeldichte" z.B. in "pixel per inch" für die Bilddatei ist in diesem Fall nicht sinnvoll.
- Bei der Ausgabe des Bildes auf dem Bildschirm wird ein auf dem Rechner gespeichertes Pixel durch ein Quadrat mit einer einheitlichen Farbe und einer

bestimmten Seitenlänge (in cm) angezeigt. Die Größe des Pixels kann berechnet werden aus der Pixelanzahl des Bildes, der Größe des Bildschirms (Diagonale) und der gerätespezifischen maximalen oder über die Grafikkarte eingestellten "**Bildschirmauflösung**" ebenfalls angegeben in "x mal y" Pixel. Jedes Pixel des Bildschirms (LCD) setzt sich aus "**Subpixeln**" (Farbelementen) zusammen, deren Anzahl durch die Grundfarben (Leuchtfarben) des **additiven Farbsystems** (Rot, Grün, Blau) festgelegt ist. Durch diese Doppeldeutigkeit des Begriffs "Pixel" entstehen immer wieder Mißverständnisse in den Diskussionen (Punkt oder Quadrat?).

- Wird ein Bild ausgedruckt, dann werden die auf dem Computer gespeicherten Pixel in **Dots (Druckpunkte)** zerlegt und nach dem **subtraktiven Farbsystem** mit den Körperfarben Cyan, Gelb, Magenta und zusätzlichen schwarzen Punkten zu Papier gebracht. Für die Druckqualität sind die Angaben "**dots per inch**" oder im Offsetdruck auch "**lines per inch**" üblich.
- Der Begriff "Auflösung" hat in der Physik eine andere Bedeutung. Und zwar ist damit das **Auflösungsvermögen** (Trennungsvermögen) z.B. des menschlichen Auges oder von optischen Geräten gemeint. Mit dem Begriff Bildauflösung besteht ein direkter Zusammenhang: Je größer die "Pixeldichte" (in pixel per inch) eines angezeigten oder gedruckten Bildes ist, umso weniger kann das Auge, abhängig von der Sehentfernung und der Sehschärfe, zwei Pixel als getrennte Punkte wahrnehmen.
- Die verschiedenen **Darstellungsebenen** eines Bildes vom "natürlichen Bild" zum "digitalisierten Bild" im Computer und zurück zum "rekonstruierten Bild" sind in Abb. 1 zusammengestellt.

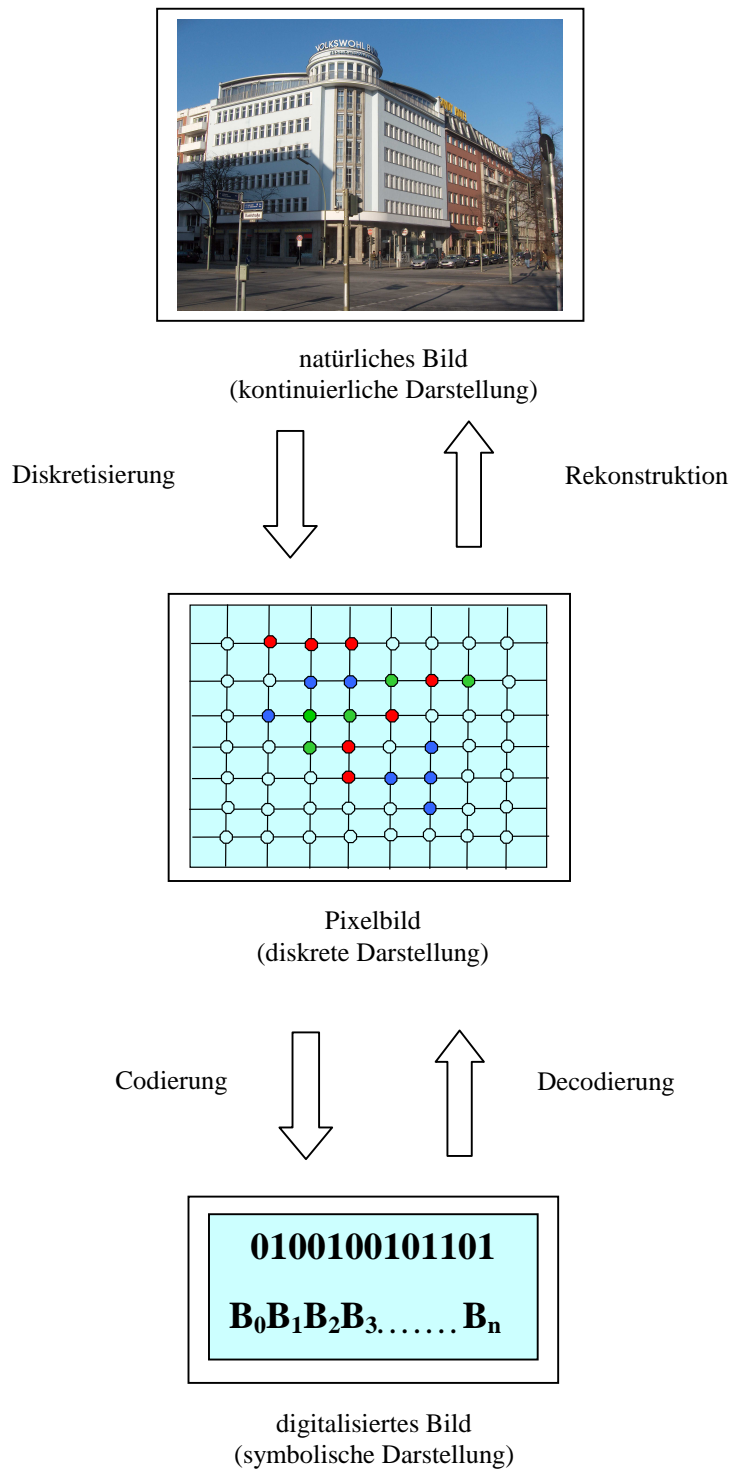


Abb. 1: Darstellungsebenen eines Bildes

- Bei Begriffsbildungen der Bildverarbeitung ist zwischen den Geräten der Bilderfassung, der Bildbearbeitung und der Bildausgabe zu unterscheiden:

Bilderfassung

- Scanner
- Digitalkamera
- Webcam

Bildbearbeitung

PC mit Bildbearbeitungsprogrammen (z.B. Photo Shop, Paint Shop Pro, Irfan View)

Bildausgabe

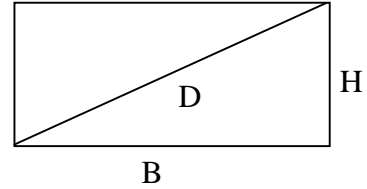
- TV-Gerät
- Bildschirm (Monitor)
- Drucker
 - Tintenstrahl
 - Laser
 - Offset
- Plotter
- Projektor (Beamer)

Im folgenden Abschnitt werden die wesentlichen Begriffe der Bildverarbeitung formelmäßig definiert und erläutert.

Berechnungsformeln

Geometrische Bildgrößen

$$\begin{array}{l} B = \sqrt{D^2 - H^2} \\ H = \sqrt{D^2 - B^2} \\ F = B \cdot H \end{array} \quad (1)$$



(B Breite des Bildes, H Höhe des Bildes, D Bilddiagonale, F Fläche des Bildes)

Einheiten:

1 inch = 1 Zoll = 1" = 2,54 cm (genau)

1 food = 1 Fuß = 12" = 30,48 cm (genau)

Seitenverhältnis (Bildformat)

$$V = \frac{B}{H} = B : H = p_B : p_H \quad (2)$$

(V Seitenverhältnis, B Bildbreite, H Bildhöhe, p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe)

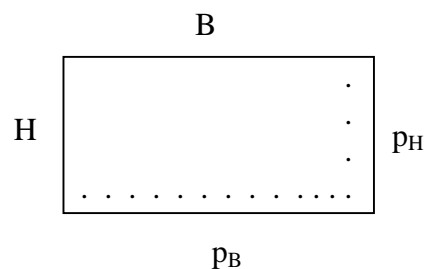
Geometrische Größe des Bildes

$$\begin{array}{l} B = \frac{V}{\sqrt{1+V^2}} \cdot D \\ H = \frac{1}{\sqrt{1+V^2}} \cdot D \\ F = \frac{V}{1+V^2} \cdot D^2 \end{array} \quad (3)$$

(B Bildbreite, H Bildhöhe, D Bilddiagonale, V Seitenverhältnis, F Fläche des Bildes)

Räumliche Auflösung (kurz: Auflösung) oder auch Bildgröße im Pixelmaß

$$A = p_B \times p_H \quad (4)$$



(A Auflösung, p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe)

Anzahl der Pixel

$$\boxed{\begin{array}{l} p_B = \sqrt{V \cdot A} \\ p_H = \sqrt{\frac{A}{V}} \end{array}} \quad (5)$$

(p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe, V Seitenverhältnis, A Auflösung)

Pixeldichte (Auflösungsdichte)

$$\boxed{A_p = \frac{p}{z}} \quad (6)$$

(A_p Pixeldichte, p Anzahl der Pixel (p_B oder p_H), z Länge (B bzw. H))

Einheiten:

px/cm (pixel pro cm), px/inch = ppi (pixel per inch)

Umrechnungen:

$$1 \text{ ppi} = 1 \frac{\text{px}}{\text{inch}} = \frac{1}{2,54} \frac{\text{px}}{\text{cm}} \approx 0,394 \frac{\text{px}}{\text{cm}}$$

$$1 \frac{\text{px}}{\text{cm}} = 2,54 \frac{\text{px}}{\text{inch}} = 2,54 \text{ ppi}$$

Zusammenhang zwischen Auflösung und Pixeldichte

$$A = p_B \cdot p_H = A_p^2 \cdot B \cdot H$$

$$\boxed{A = A_p^2 \cdot F; \quad A_p = \sqrt{\frac{A}{F}}} \quad (7)$$

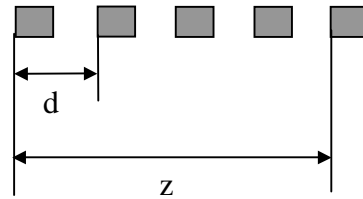
$$\boxed{A_p = \frac{1}{D} \cdot \sqrt{\frac{1+V^2}{V}} \cdot A} \quad (8)$$

$$\boxed{A = D^2 \cdot \frac{V}{1+V^2} \cdot A_p^2} \quad (9)$$

(A Auflösung, A_p Pixeldichte, p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe, B Bildbreite, H Bildhöhe, $F = B \times H$ Fläche des Bildes, D Bilddiagonale, V Seitenverhältnis)

Pixelabstand (Pixelgröße)

$$d = \frac{z}{p} = \frac{1}{A_p} \quad (9)$$



(d Pixelabstand, z Länge (B oder H), p Anzahl der Pixel (p_B bzw. p_H), A_p Pixeldichte)
Bei aneinander liegenden Pixeln ist d die Seitenlänge eines Pixels.

Bildgröße

$$B \times H = \frac{p_B}{A_p} \times \frac{p_H}{A_p} \quad (10)$$

(B Bildbreite, H Bildhöhe, p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe, A_p Pixeldichte)

Skalierung

Anpassung der Auflösung A_B einer Bilddatei an die Auflösung A_G eines bildanzeigenden Gerätes

$$A_B \rightarrow A_G \quad (10)$$

Skalierfaktor

$$S = \frac{A_G}{A_B} \quad (11)$$

(S Skalierfaktor, A_G Auflösung des Bildes nach der Skalierung, A_B Auflösung des Bildes vor der Skalierung)

Farbtiefe

$$T = \frac{bit}{p} \quad (12)$$

(T Farbtiefe, bit Anzahl der Bits, p Anzahl der Pixel (px))

Einheit:

bpp (bits per pixel; typisch 24 bpp (true color, $2^{24} = 16,7$ Mio. Farben))

Dateigröße

$$G = A \cdot T = p_B \cdot p_H \cdot T \quad (13)$$

(G Dateigröße der unkomprimierten Bilddatei in bits, A Auflösung, T Farbtiefe, p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe)

Umrechnung in Bytes:

1 Byte = 8 bit; 1 Kbyte (Kilobyte) = 1024 Byte; 1 Mbyte (Megabyte) = 1024 Kbyte

Bildkompression

$$\rho = \frac{\text{Anzahl der Bits}}{\text{Anzahl der Pixel}} \quad (14) \quad \text{Datenreduktionsfaktor}$$

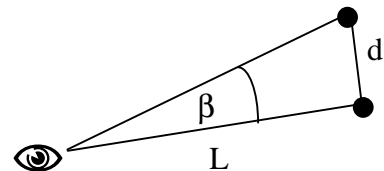
$$\kappa = \frac{\text{komprimierte Dateigröße}}{\text{unkomprimierte Dateigröße}} = \frac{\rho}{T} \quad (15) \quad \text{Kompressionsrate ("auf")}$$

$$1 - \kappa \quad (16) \quad \text{Kompressionsgrad ("um")}$$

(T Farbtiefe)

Schwinkel

$$\beta = \arctan\left(\frac{d}{L}\right) \approx \frac{d}{L} \quad (d \ll L) \quad (17)$$



(β Schwinkel, d Abstand von zwei Punkten, L Sehabstand)

Sehschärfe (Visus)

$$vis = \frac{\beta_0}{\beta} \quad (18)$$

(vis Visus, $\beta_0 = 1'$ (1 Winkelminute), β Schwinkel, unter dem vom menschlichen Auge zwei Punkte noch als getrennt wahrgenommen werden; $vis = 1$ ($\beta = \beta_0 = 1'$) entspricht dem Auflösungsvermögen des normalsichtigen, menschlichen Auges)

Abstandsgesetz

$$L = \frac{d}{\beta} = \frac{d \cdot vis}{\beta_0} = \frac{vis}{\beta_0 \cdot A_p}$$
$$\beta_0 = 1' = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}; \quad \frac{1}{\beta_0} = 3.438$$

$L = 3.438 \cdot \frac{vis}{A_p}$

 (19)

(L Sehabstand, d Pixelabstand bzw. Seitenlänge eines Pixels, β Schwinkel, vis Visus (Sehschärfe), A_p Pixeldichte)

Optimale Bildauflösung

$$A = p_B \cdot p_H$$
$$p_B = A_p \cdot B; \quad p_H = A_p \cdot H$$
$$A_p = 3.438 \cdot \frac{vis}{L}$$

$p_B = 3.438 \cdot vis \cdot \frac{B}{L}$
 $p_H = \frac{p_B}{V}$

 (20)

(A Auflösung, p_B Anzahl der Pixel in Bildbreite, p_H Anzahl der Pixel in Bildhöhe, A_p Pixeldichte, B Bildbreite, H Bildhöhe, vis Visus, L Sehabstand, V Seitenverhältnis)

Faustformel:

Das 3 – fache des Verhältnisses von Bildbreite zu Sehabstand ergibt die optimale Pixelzahl in KiloPixel für die Breite des Bildes.

 (21)

Arithmetik der Farben

The presence or absence of light is what causes the sensation of color.

Velho, Frery, Gomes

Ein Pixel (Bildelement) ist ein Bildpunkt mit vollständiger Farbinformation. Zur Darstellung von Farben werden Farbmodelle verwendet. Die wichtigsten sind:

- Das **RGB-Modell** basiert auf den Grundfarben (Leuchtfarben) Rot, Grün und Blau des additiven Farbsystems.
- Das **CMYK-Modell** basiert auf den Grundfarben des subtraktiven Farbsystems mit den Körperfarben Cyan, Magenta und Gelb (Yellow), dem noch Schwarz (Key) zugemischt wird.
- Das **HSB(I)-Modell** betont das Farbempfinden des Menschen mit dem Farbton (Hue), der Farbsättigung (Saturation) und der Helligkeit (Brightness, Intensity).

Das RGB- und das CMY-Modell

Dem RGB-Modell kommt in der digitalen Technik eine besondere Bedeutung zu, da viele Geräte wie Digitalkamera, Scanner, Monitor auf diesem Modell aufbauen. Bei einer Farbtiefe von 24 bit pro pixel steht für jeden Farbkanal der Grundfarben Rot, Grün und Blau ein Byte mit $2^8 = 256$ Abstufungen zur Verfügung, d.h. insgesamt ergeben sich als Mischung $256 \times 256 \times 256 = 2^{24} = 16,7$ Millionen Farben.

Die Grundfarben können durch Zahlentripel (Ortsvektoren) dargestellt werden; sie bilden als Basisvektoren einen 3-dimensionalen Farbraum:

$$\text{Rot(R)} = (255, 0, 0) \qquad \text{Grün(G)} = (0, 255, 0) \qquad \text{Blau(B)} = (0, 0, 255)$$

Damit kann eine Farbe F durch die folgende **Farbgleichung** dargestellt werden:

$$\boxed{F = rR + gG + bB = (r, g, b)} \qquad (22)$$

mit den Farbwerten (Mischungsbeiträgen, Farbanteilen) r, g und b.

Die Mischfarben ergeben sich nach den Regeln der **additiven Farbmischung**, z.B. die folgenden Sekundärfarben:

$$\left. \begin{aligned} \text{Rot(R)} + \text{Grün(G)} &= (255, 0, 0) + (0, 255, 0) = (255, 255, 0) = \text{Gelb(Y, Yellow)} \\ \text{Grün(G)} + \text{Blau(B)} &= (0, 255, 0) + (0, 0, 255) = (0, 255, 255) = \text{Cyan (C)} \\ \text{Blau(B)} + \text{Rot(R)} &= (0, 0, 255) + (255, 0, 0) = (255, 0, 255) = \text{Magenta(M)} \end{aligned} \right\} (23)$$

Als tertiäre Farbmischung erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Rot(R)} + \text{Grün(G)} + \text{Blau(B)} &= (255, 0, 0) + (0, 255, 0) + (0, 0, 255) = \\ &= (255, 255, 255) = \text{Weiß(W)} \end{aligned} \qquad (24)$$

Zusammen mit:

Keine Farbe = (0, 0, 0) = Schwarz (K, Key) und
Grau = (u, u, u) mit gleichen Farbwerten u

bezeichnet man diese Farben als **Unbuntfarben**.

Diese einfachen Rechenregeln lassen sich im einfachsten Farbordnungssystem, dem 6-teiligen Farbkreis darstellen, der sich auch aus den Spektralfarben ableiten läßt (siehe Abb. 2 und 3).

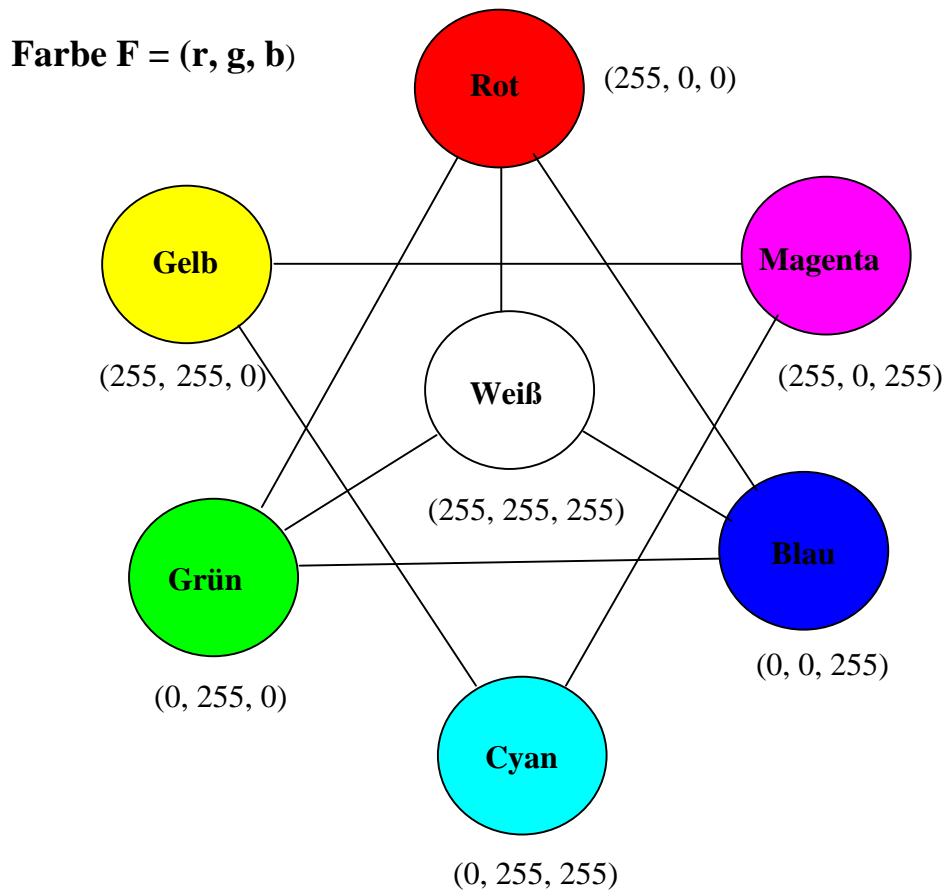


Abb. 2: Elementarfarbkreis der Grundfarben

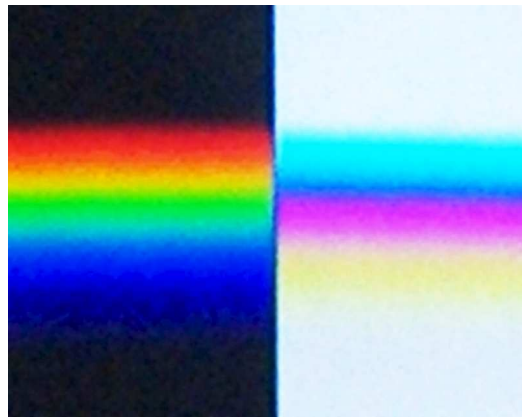


Abb. 3: Spektrum am Spalt (Regenbogenfarben) und am Balken ("negativer" Spalt)

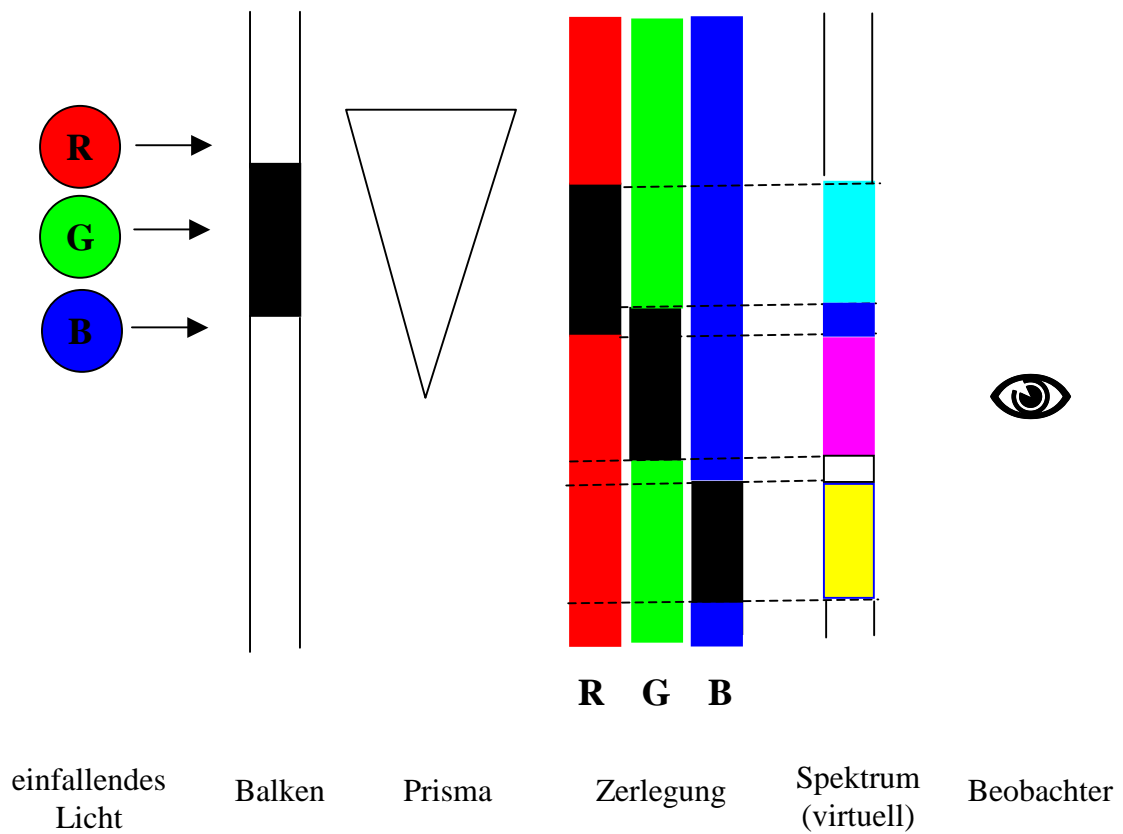


Abb. 4: Entstehung von Magenta im Balken-Spektrum (schematisch)

Eine besondere Bedeutung kommt der Farbe "Magenta (Purpur)" zu, die im normalen (Spalt-) Spektrum nicht vorkommt und der keine Wellenlänge zugeordnet werden kann. Diese Farbe wird im "Balkenspektrum" wahrgenommen, dessen Entstehung schematisch in Abb. 4 dargestellt ist. Wie man hier gut erkennen kann, entsteht diese Farbe, wenn an der entsprechenden Stelle aus dem weißen Sonnenlicht mit den Komponenten Rot, Grün und Blau durch den Balken das Grün abgedeckt wird. Die verbleibenden Farben Rot und Blau reizen im menschlichen Auge die rot- und blau empfindlichen Zapfen auf der Netzhaut. Der Reiz wird weitergeleitet und dann im Gehirn additiv zu Magenta gemischt.

Auf einem Computer- oder Fernsehbildschirm werden Pixel durch Subpixel dargestellt (siehe Abb. 5). Für die Wellenlängen der abgestrahlten Grundfarben eines LCD-Bildschirms wurden folgende Werte mit einem Spektrometer gemessen:

$$\lambda_R = 610 \text{ nm} \qquad \lambda_G = 540 \text{ nm} \qquad \lambda_B = 450 \text{ nm}$$

Zum Vergleich liegen die Absorptionsmaxima der farbempfindlichen Zapfen im menschlichen Auge im Mittel bei:

$$\lambda_R = 560 \text{ nm} \qquad \lambda_G = 530 \text{ nm} \qquad \lambda_B = 420 \text{ nm}$$

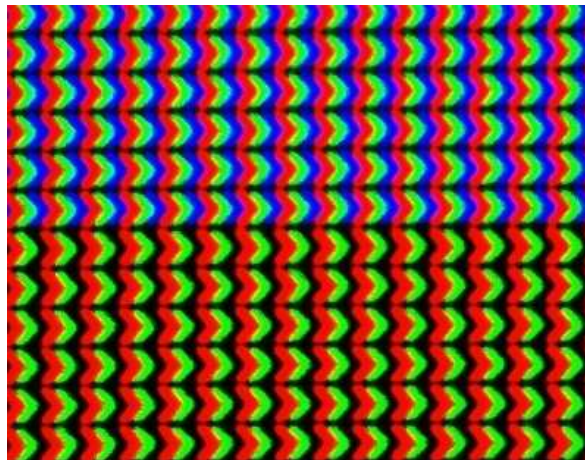


Abb. 5: Vergrößerte Aufnahme der Pixelstruktur eines LCD-Bildschirms (oben die Farbe Weiß, unten Gelb)

Im Gegensatz zur additiven Farbmischung von **Lichtfarben**, wie sie oben beschrieben wurden, kommt die Farbempfindung von **Körperfarben** anders zustande. Bei einer Farbunterlage wird ein Teil des weißen Sonnenlichtes absorbiert. Man kann schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \text{Weiß(W)} - \text{Rot(R)} &= (255, 255, 255) - (255, 0, 0) = (0, 255, 255) = \text{Cyan(C)} \\ \text{Weiß(W)} - \text{Grün(G)} &= (255, 255, 255) - (0, 255, 0) = (255, 0, 255) = \text{Magenta(M)} \\ \text{Weiß(W)} - \text{Blau(B)} &= (255, 255, 255) - (0, 0, 255) = (255, 255, 0) = \text{Gelb(Y)} \end{aligned} \right\} (25)$$

oder auch:

$$\left. \begin{aligned} \text{Weiß(W)} - \text{Cyan(C)} &= (255, 255, 255) - (0, 255, 255) = (255, 0, 0) = \text{Rot(R)} \\ \text{Weiß(W)} - \text{Magenta(M)} &= (255, 255, 255) - (255, 0, 255) = (255, 255, 0) = \text{Grün(G)} \\ \text{Weiß(W)} - \text{Gelb(Y)} &= (255, 255, 255) - (255, 255, 0) = (0, 0, 255) = \text{Blau(B)} \end{aligned} \right\} (26)$$

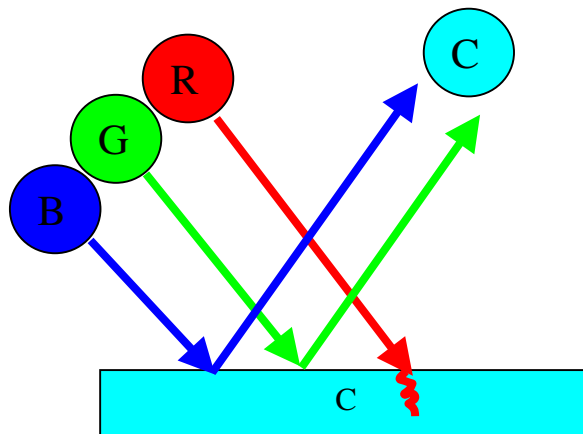


Abb. 6: Entstehung von Körperfarben
(weißes Licht fällt auf eine cyanfarbene Unterlage)

Dieser Sachverhalt läßt sich in einer Grafik veranschaulichen (Abb. 6). Fällt weißes Sonnenlicht auf eine cyanfarbene Unterlage, dann wird von den Pigmenten in der Unterlage der rote Anteil absorbiert und nur der grüne und blaue Anteil werden remittiert. Diese beiden Anteile werden als Cyan wahrgenommen (additiv gemischt).

In einem weiteren Beispiel (Abb. 7) wird gezeigt, wie eine cyanfarbige Unterlage grün erscheint, wenn sie mit gelbem Licht, das sich aus den Anteilen Rot und Grün zusammensetzt, angestrahlt wird.

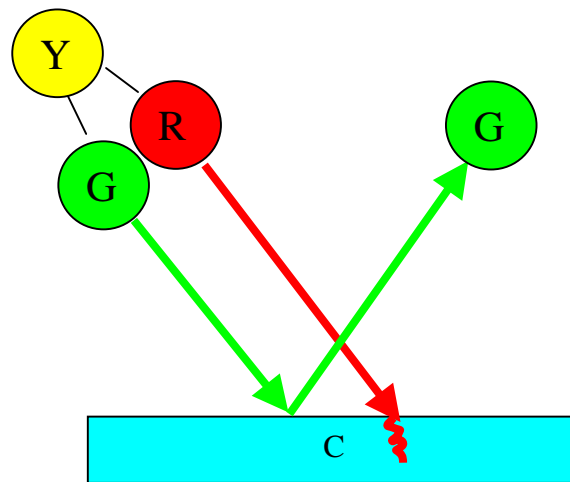


Abb. 7: Eine cyanfarbene Unterlage wird mit gelbem Licht angestrahlt

Formelmäßig läßt sich schreiben:

$$Y - R = (255, 255, 0) - (255, 0, 0) = (0, 255, 0) = G$$

Durch Absorption von Grün kommt die Farbe Magenta zustande (Abb. 8).

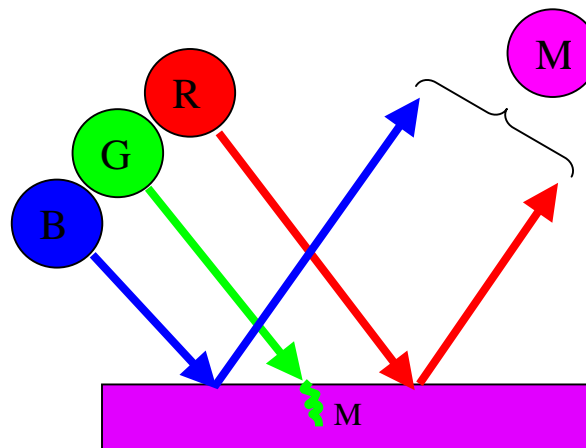


Abb. 8: Entstehung der Farbe "Magenta (Purpur)"

Berechnung:

$$W - G = (R + G + B) - G = R + B = M$$

An diesen Beispielen kann man erkennen, daß die wahrgenommenen Körperfarben dadurch zustande kommen, wenn aus dem weißen Licht ein Teil absorbiert (subtrahiert) wird. Man spricht daher von **subtraktiver Farbmischung**.

Auch die Farben des Balkenspektrums (Abb. 3 und 4) können durch die subtraktive Farbmischung erklärt werden. Durch den Balken wird ein Teil des weißen Lichtes ausgeblendet (z.B. $C = W - R$, $B = W - R - G$, $M = W - G$ usw.).

Komplementärfarben

Aus $R + G + B = W$ (Gl. 24) und $R + G = Y$ (Gl. 23) kann man ableiten: $Y + B = W$
Farben, die sich zu Weiß ergänzen heißen **Komplementärfarben**, d.h. Gelb(Y) ist die
Komplementärfarbe zu Blau(B).

Allgemein ist:

$$\boxed{F + \underline{F} = W} \quad (27)$$

(F Farbe, \underline{F} Komplementärfarbe, W Weiß)

Es ergeben sich somit die Komplementärfarben:

$$R \leftrightarrow C \quad G \leftrightarrow M \quad B \leftrightarrow Y$$

Bei den Körperfarben ergibt sich z.B. nach Gl. 26: $W - C = R$
mit den Komplementärfarben C und R, allgemein:

$$\boxed{W - F = \underline{F}} \quad (28)$$

als Umstellung von Gl. 27.

Subtraktive Farbmischung

Mit den Gleichungen 27 und 28 läßt sich folgendes "Mischungsgesetze" der **subtraktiven Farbmischung**, wie es in der Drucktechnik oder dem Mischen von Wasserfarben angewendet wird, formal ableiten:

Mischungsregeln

Wenn $F_1 + F_2 = F$ (additives Farb-Mischungs-Gesetz), dann $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}$ (subtraktives Farb-Mischungs-Gesetz) und umgekehrt.	(29)
--	------

Ableitung:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = (W - F_1) + (W - F_2) \quad (\text{Festsetzung: } W + W = W, \text{ weißer gehts nicht!}) \\ = W - F_1 - F_2 = W - (F_1 + F_2) = W - F = \underline{F}$$

$$F_1 + F_2 = (W - \underline{F}_1) + (W - \underline{F}_2) = W - (\underline{F}_1 + \underline{F}_2) = W - \underline{F} = F$$

Tabelle 1 enthält eine Gegenüberstellung der additiven und subtraktiven Mischungsregeln unter Anwendung von Gl. 29.

additive Mischung	subtraktive Mischung
allgemein: $F_1 + F_2 = F$ $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}$	$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}$ $F_1 + F_2 = F$
Einzelfarben: $R = \underline{C}$ $\underline{Y} = B$ $W = \underline{K}$	$\underline{R} = C$ $Y = \underline{B}$ $\underline{W} = K$
Sekundärfarben: $R + G = Y$ $\underline{C} + \underline{M} = \underline{B}$ $G + B = C$ $\underline{M} + \underline{Y} = \underline{R}$ $B + R = M$ $\underline{Y} + \underline{C} = \underline{G}$	$\underline{R} + \underline{G} = \underline{Y}$ $C + M = B$ $\underline{G} + \underline{B} = \underline{C}$ $M + Y = R$ $\underline{B} + \underline{R} = \underline{M}$ $Y + C = G$
Tertiäre Farbe: $R + G + B = W$ $\underline{C} + \underline{M} + \underline{Y} = \underline{K}$	$\underline{R} + \underline{G} + \underline{B} = \underline{W}$ $C + M + Y = K$
Komplementärfarben: $R + C = W$ $\underline{C} + \underline{R} = \underline{K}$ $G + M = W$ $\underline{M} + \underline{G} = \underline{K}$ $B + Y = W$ $\underline{Y} + \underline{B} = \underline{K}$	$\underline{R} + \underline{C} = \underline{W}$ $C + R = K$ $\underline{G} + \underline{M} = \underline{W}$ $M + G = K$ $\underline{B} + \underline{Y} = \underline{W}$ $Y + B = K$
Zwischenfarbe: $R + Y = R + (R + G)$ $= 2R + G \quad :2$ $\equiv R + 1/2 G$ $= (255, 128, 0)$ $= \text{Orange}$	$\underline{R} + \underline{Y} \equiv \underline{R} + 1/2 \underline{G} = \underline{\text{Orange}}$ $C + B \equiv C + 1/2 M = \text{Mittelblau}$

Tab. 1: Gegenüberstellung von additiver und subtraktiver Farbmischung (Beispiele)
 (Das Zeichen "≡" ist zu lesen: "wird wahrgenommen als ...")

Die Farben **Cyan, Magenta und Gelb (CMY)** sind die Grundfarben, die in der Drucktechnik Verwendung finden. Abb. 9 zeigt eine mikroskopische Aufnahme eines Druckbildes, das mit einem Tintenstrahldrucker ausgedruckt wurde. Die einzelnen, nebeneinander liegenden Druckpunkte (Dots) in den Grundfarben werden in diesem Fall bei normaler Betrachtung, infolge des begrenzten Auflösungsvermögens des menschlichen Auges, als Grau wahrgenommen (partitive Mischung).



Original



V ≈ 80fach

Abb. 9: Druckbild eines Tintenstrahldruckers
(Schriftgröße 4 pt ≡ 0,93 mm, Farbe Grau (200, 200, 200), Fotopapier)

In Abb. 9 liegen die Druckpunkte einzeln nebeneinander. Im Vierfarbendruck können sich die Druckpunkte aber auch teilweise oder ganz überlappen, wobei sich die Farben subtraktiv mischen. Man spricht dann von **autotypischer Farbmischung**. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 10 schematisch dargestellt.

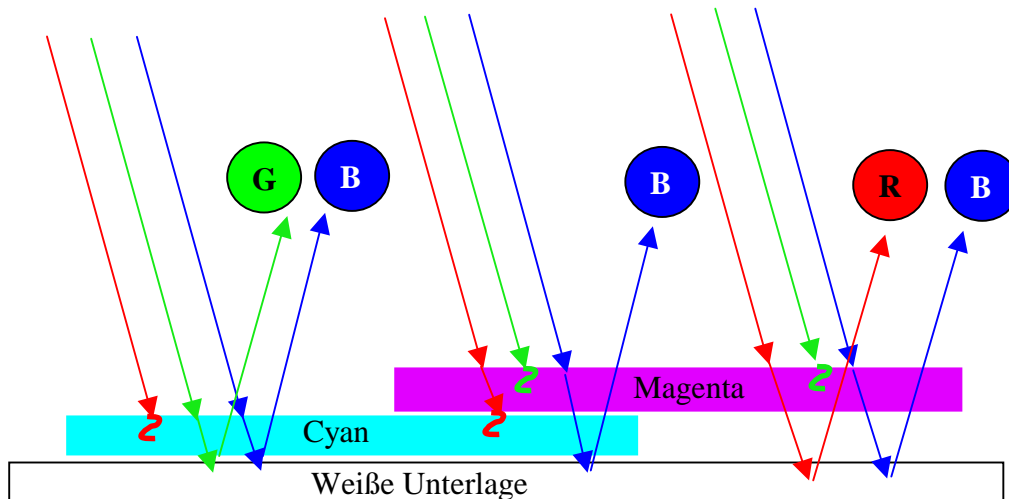


Abb. 10: Autotypische Farbmischung

Die remittierten Farbanteile R, G und B werden als Unbuntpfarbe (Weiß) wahrgenommen sodaß ein Überschuß an Blau übrig bleibt. Als Gesamtfarbeindruck ergibt sich somit die Farbe Blau (Das Zeichen "≡" ist zu lesen: "wird wahrgenommen als ...").

$$G + B + B + R + B = (R + G + B) + 2B = W + 2B \equiv B$$

Die Grundfarben C, M, Y der subtraktiven Farbmischung bilden ebenfalls einen 3-dimensionalen Farbraum [c, m, y], nach dem sogenannte **CMY-Modell**, wobei folgende Umrechnungen gelten:

$$\begin{aligned} c &= 255 - r & m &= 255 - g & \text{und} & y &= 255 - b \\ F &= [c, m, y] = [255 - r, 255 - g, 255 - b] = (255 - c, 255 - m, 255 - y) = (r, g, b) \end{aligned}$$

(30)

Beispiel: Rot

RGB-Modell: $F = (255, 0, 0)$

CMY-Modell: $F = [0, 255, 255]$

Filterfarben

Nach den Regeln der subtraktiven Farbmischung können auch Filterfarben bestimmt werden, z.B. bei einem Cyan-Filter (Abb. 10). In diesem Beispiel wird besonders deutlich, wie die Filterfarbe Cyan durch Subtraktion von Rot vom weißen Licht zustande kommt.

Absorptionsregel

Bei Farbfilttern und Körperfarben werden stets die Komplementärfarben absorbiert, z.B.: $W - \underline{C} = W - R = (R + G + B) - R = G + B = C$

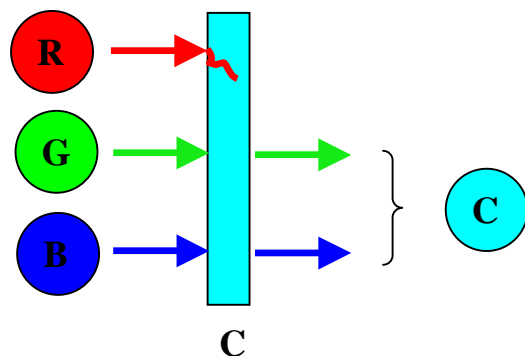


Abb. 10: Cyan-Filter

Nach ähnlichen Überlegungen kann die Filterfarbe bei mehreren, hintereinander geschalteten Filtern vorausgesagt werden (Abb. 11).

Wird weißes Licht durch ein hintereinander geschaltetes Cyan- und Gelbfilter geschickt, dann werden die Farben Rot und Blau absorbiert. Übrig bleibt das Grün, unter dem die weiße Lichtquelle dann erscheint.

$$W - \underline{C} - \underline{Y} = (R + G + B) - R - B = G$$

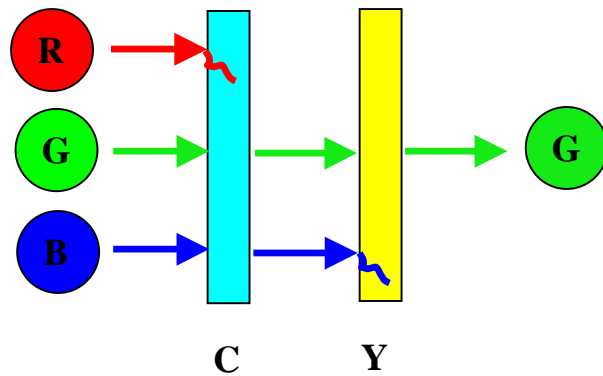


Abb. 11: Hintereinanderschaltung eines Cyan- und Gelb-Filters

Eine andere Überlegung kann man nach Gl. 29 anstellen:

Die Farben C und Y werden subtraktiv gemischt, d.h. nach den additiven Mischungsregeln

$$\underline{C} + \underline{Y} = R + B = M = \underline{G}.$$

Somit ergibt sich die subtraktive Mischungsregel

$$C + Y = G$$

In einem weiteren Beispiel falle cyanfarbiges Licht auf ein Gelbfilter (Abb. 12)

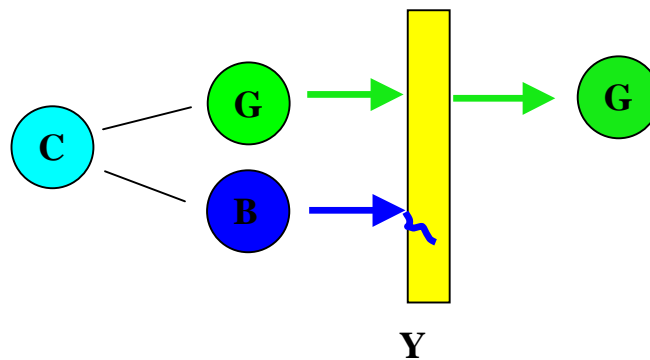


Abb. 12: Cyanfarbiges Licht fällt auf ein Gelbfilter

Subtraktives Mischungsgesetz: $C + Y = G$

Denn nach dem additiven Mischungsgesetz ist:

$$\underline{C} + \underline{Y} = R + B = M = \underline{G}$$

Oder:

$$C - \underline{Y} = C - B = (G + B) - B = G$$

Das HSB(I) - Modell

Nach Gl. (22) läßt sich im RGB-Modell eine Farbe F als Zahlentripel mit den Farbwerten r, g und b darstellen.

$$F = (r, g, b)$$

Es können nun folgende Kenngrößen definiert werden:

$$\begin{aligned} \text{MAX} &= \max (r, g, b) && \text{(die größte der 3 Zahlen r, g, b)} \\ \text{MIN} &= \min (r, g, b) && \text{(die kleinste der 3 Zahlen r, g, b)} \end{aligned}$$

$$i = \frac{1}{2} \cdot (\text{MAX} + \text{MIN}) \quad (31)$$

Dieser Mittelwert wird im HSB(I)-Modell als **Farbhelligkeit** oder **Farbintensität** interpretiert.

$$s = 255 \cdot \frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MAX} + \text{MIN}} \quad (32)$$

Diese Größe wird zur Angabe der **Farbsättigung** herangezogen. Besondere Bedeutung kommt im HSB(I)-Modell dem **Farbton** h (hue) zu, der sich wie folgt berechnen läßt:

Gegeben:

$$r, g, b \quad (0, 1, \dots, 255 \text{ Stufeneinheiten})$$

Hilfsgröße:

$$D = \text{MAX} - \text{MIN}$$

Farbton:

$$h(\text{in Stufeneinheiten}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } \text{MAX} = \text{MIN} \\ 0 + \frac{g-b}{D} & \text{für } \text{MAX} = r \\ 2 + \frac{b-r}{D} & \text{für } \text{MAX} = g \\ 4 + \frac{r-g}{D} & \text{für } \text{MAX} = b \end{array} \right\} \cdot \frac{128}{3} \quad (33)$$

Umrechnung:

$$1 \text{ Stufeneinheit} = (360/256)^0$$

$$1^0 = (256/360) \text{ Stufeneinheiten}$$

Beispiel: $F = (180, 30, 70)$

Es ist $MAX = 180$ und $MIN = 30$,

und somit $i = (180 + 30) / 2 = 105$; $s = 255 (180 - 30) / (180 + 30) = 182$

und mit $MAX = r$ für den Farbton $h = (128 / 3) * (30 - 70) / (180 - 30) = -11$ oder $h = 256 - 11 = 245$ (dunkelrot).

Mischen von Farbtönen

In Grafikprogrammen können **Vollfarben** (maximale Sättigung und volle Intensität), gemäß dem folgenden Schema (Abb. 12), aus den Grundfarben Rot, Grün und Blau am Bildschirm gemischt werden.

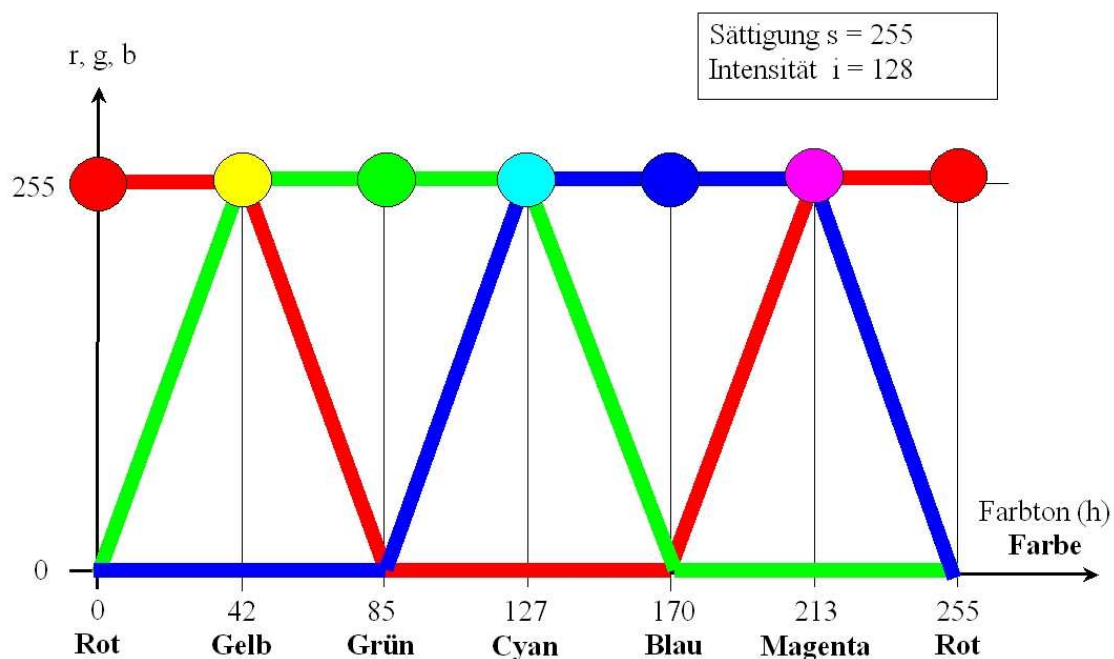


Abb. 12: Darstellung der Vollfarben in einem Grafikprogramm

Geht man von der Grundfarbe Rot = (255, 0, 0) aus und erhöht schrittweise den Grünanteil, dann erhält man 256 Abstufungen über Orange bis zum reinen Gelb = (255, 255, 0). Wird nun der Rotanteil reduziert, dann ergibt sich stufenweise über Gelbgrün die Grundfarbe Grün = (0, 255, 0). Durch Zumischen der Grundfarbe Blau erhält man über Blaugrün die Farbe Cyan = (0, 255, 255). Die Reduktion des Grünanteils führt über Mittelblau zur Grundfarbe Blau = (0, 0, 255). Wird zum Blau das Rot hinzugemischt, ergibt sich über Violett die Farbe Magenta = (255, 0, 255) als Komplementärfarbe zu Grün. Und schließlich ergibt die Reduktion von Blau wieder unsere Ausgangsfarbe Rot. Wir durchlaufen also den gleichen Elementarfarbkreis wie er in Abb. 2 dargestellt ist.

Es ergeben sich 6 Intervalle mit jeweils 256 Abstufungen, also $6 \times 256 - 1 = 1535$ Vollfarben. Bei den Vollfarben ist mindestens eine der 3 Grundfarben gleich null. Man erkennt hier auch die Komplementärfarben, deren Mischung Weiß ergibt:

Gelb \leftrightarrow Blau

Cyan \leftrightarrow Rot

Magenta \leftrightarrow Grün

Wird bei den Vollfarben Intensität und Sättigung verändert, dann kann das HSB(I)-Modell geometrisch als Zylinder veranschaulicht werden (siehe Abb. 13).

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{h}, \mathbf{s}, \mathbf{i}\}$$

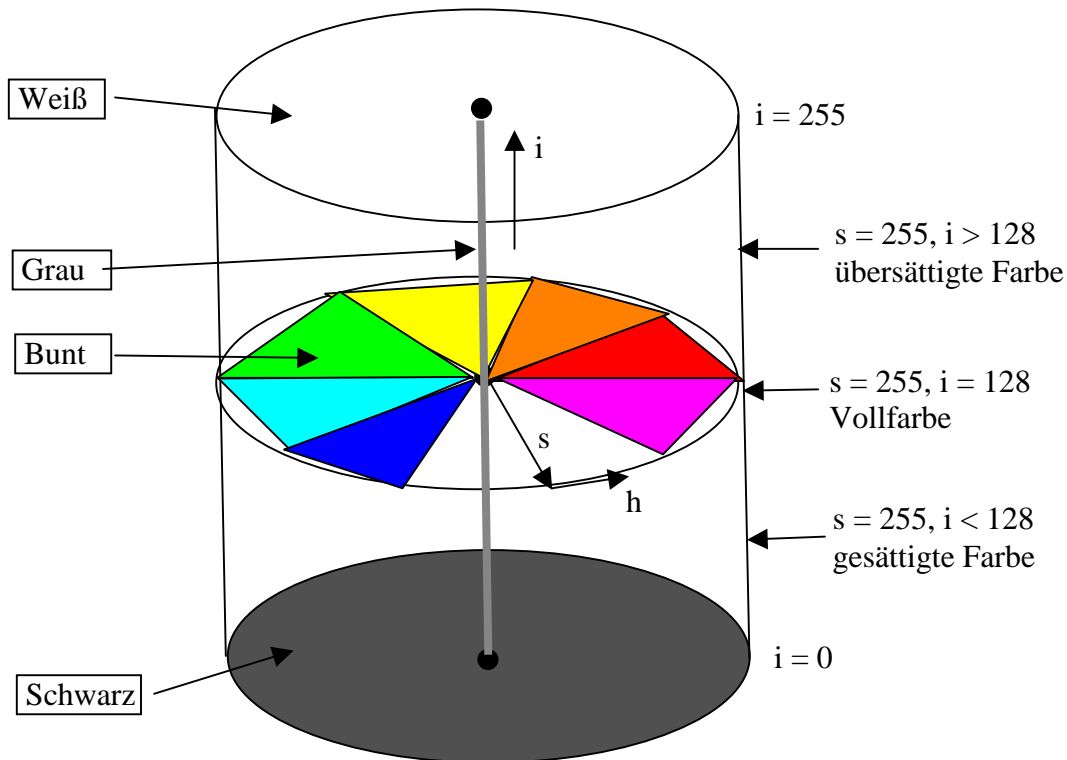


Abb. 13: HSB(I)-Modell in Zylinderkoordinaten (schematisch)

Wird bei einer Vollfarbe ($s = 255, i = 128$) die Sättigung s reduziert, dann wird ein Grauteil beigemischt, bis schließlich die Graulinie mit gleichen Farbanteilen (u, u, u) erreicht ist.

Wird andererseits bei einer Vollfarbe die Intensität i reduziert, dann ändert sich die "Helligkeit" bis schließlich kein Licht mehr abgestrahlt wird und Schwarz entsteht.

Wird jedoch bei einer Vollfarbe die Intensität erhöht, dann werden alle Farbanteile, auch die die bisher nicht vorhanden waren, vergrößert, bis schließlich Weiß ($255, 255, 255$) entsteht.

Ein Beispiel für die Abwandlung eines Farbtons in Sättigung und Intensität ist in Abb. 14 dargestellt.

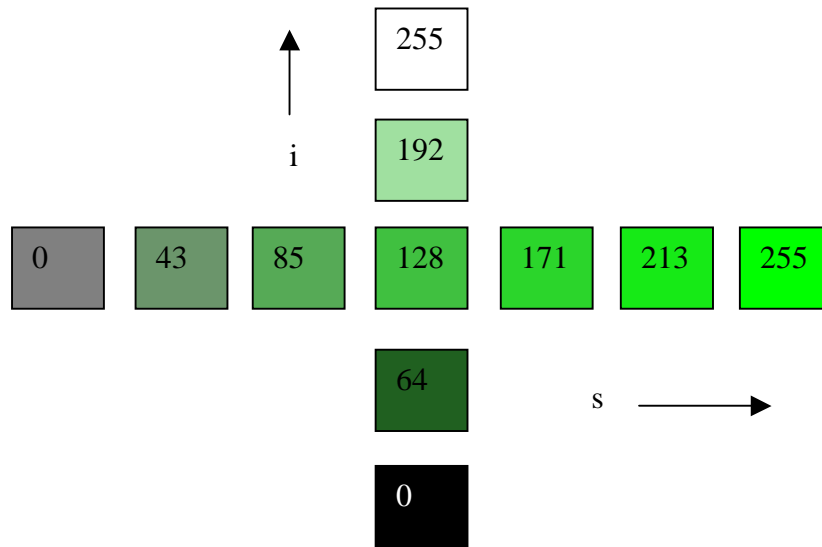


Abb. 14: Abwandlung einer Farbe ($h = 85$) in Sättigung s und Intensität i

In Grafikprogrammen können die entsprechenden Einstellungen mit Farbreglern vorgenommen werden, wie es als Beispiel in Abb. 15 abgebildet ist.

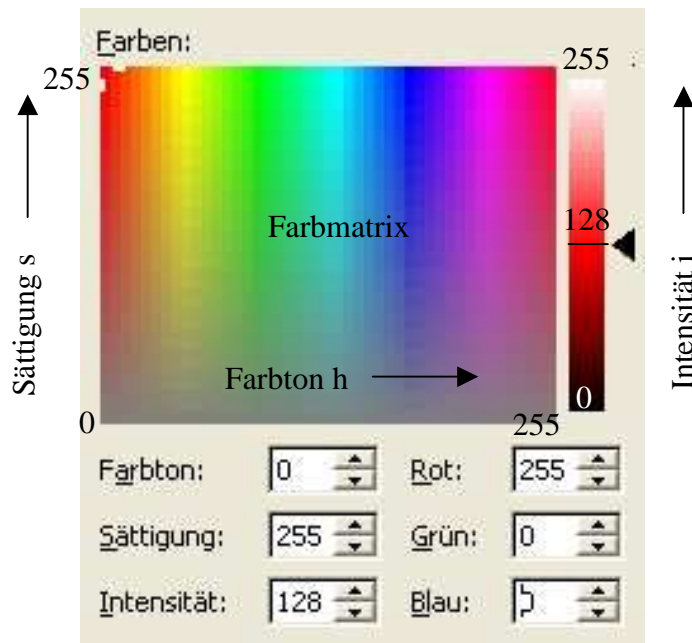


Abb. 15: Farbreger in einem Office-Programm

Ein weiteres interessantes Beispiel zur Farbdarstellung in einem Bildbearbeitungsprogramm (Irfan View) zeigt Abb. 16

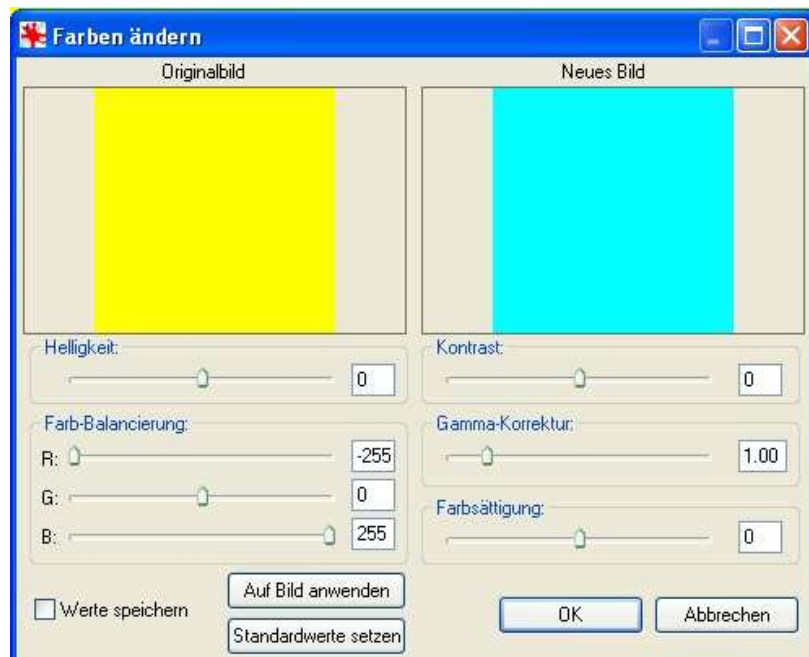


Abb. 16: Farbreger eines Bildbearbeitungsprogramms (Irfan View)

In diesem Programm können auch negative Farbwerte eingegeben werden. Damit ist es möglich, die additive und subtraktive Farbmischung zu kombinieren. Folgende Gesetzmäßigkeiten können festgestellt werden:

1) Additive Farbmischung

Ausgangssituation: $-R - G - B = K$ (Schwarz)

$$K + R = R$$

$$R + R = R$$

$$R + G = Y$$

$$G + B = C$$

$$B + R = M$$

$$R + G + B = W \text{ (Weiß)}$$

$$W + R = W$$

$$B + Y = B + (R + G) = B + R + G = (B + R) + G = M + G = W$$

2) Subtraktive Farbmischung

Ausgangssituation: $+R + G + B = W$ (Weiß)

$$W - R = C$$

$$W - G = M$$

$$W - B = Y$$

$$W - C = W - (G + B) = W - G - B = R$$

$$W - M = W - (R + B) = W - R - B = G$$

$$W - Y = W - (R + G) = W - R - G = B$$

$$W - R - G - B = K \text{ (d.h. } W - W = \underline{W} = K)$$

$$R - R = K$$

$$R - G = R$$

$$R - B = R$$

$$Y - R = (R + G) - R = G$$

3) Zusammengesetzte Farbmischungen (siehe Abb. 16)

$$Y - R + B = (R + G) - R + B = G + B = C$$

Beispiele

Auflösung eines Farbbilds (Näherungsformel)

Ein Digitalfoto im Normalformat 10 x 15 cm soll aus einer Sehentfernung von 30 cm betrachtet werden. Nach der Faustformel (21) ergibt sich eine digitale Bildbreite von 1500 Pixel.

Auflösung eines Farbbilds (genaue Rechnung)

Das Bild mit einer Bildbreite von 15 cm soll aus einer Sehentfernung von 30 cm betrachtet werden. Die Sehschärfe betrage 1,0.

Welche Pixelzahl bzw. welche Auflösungsdichte muß das Bild aufweisen, damit es "pixelfrei" gesehen wird?

Gegeben: B = 15 cm; L = 30 cm; vis = 1,0

Berechnung nach Formel (20):

$$p_B = 3.438 \cdot 1,0 \cdot \frac{15}{30} = 1.719 \text{ px}$$

nach Formel (6):

$$A_p = \frac{1.719}{15} = 115 \text{ px/cm} = 292 \text{ dpi}$$

Digitalfoto für Tageszeitung

Um ein Digitalfoto in einer Tageszeitung zu veröffentlichen, werden von der Druckerei folgende Anforderungen gestellt:

- Dateiformat JPEG, möglichst unbearbeitet
- Auflösung 220 dpi bei einer Spaltenbreite von 24,2 cm

Frage: Mit welchen Eigenschaften muß ein Fotograf ein Bild abliefern?

Berechnung:

- 1) $A_p = 220 \text{ dpi} = 220 / 2,54 \text{ px/cm} = 87 \text{ px/cm}$ (Pixeldichte in Pixel pro cm)
- 2) $p_B = A_p \cdot B = 87 \cdot 24,2 \text{ px} = 2.105 \text{ px}$ (Anzahl der Pixel in Spaltenbreite (Bildbreite))
- 3) $p_H = p_B / V = 2.105 \cdot 3 / 4 = 1.579 \text{ px}$ (Anzahl der Pixel in Bildhöhe, V = 4:3 (Seitenverhältnis))
- 4) $A = p_B \cdot p_H = 2.105 \cdot 1.579 \text{ px} = 3.324.000 \text{ px} = 3,3 \text{ MP}$ (Auflösung in Megapixel)

Für ein Bild wird eine Digitalkamera mit einer Auflösung von mindestens 3,5 MP benötigt.

Kurzformel:

$$A = (A_p \cdot B)^2 / V$$

(A Auflösung, A_p Pixeldichte, B Bildbreite, V Seitenverhältnis)

Anmerkungen:

- 1) Abschätzung der Dateigröße

unkomprimiert (Farbtiefe T = 24 bit/px): $G_{\text{unkom}} = A \cdot T / 8 = 3.300.000 \cdot 24 / 8 / 1.024 / 1.024 \text{ MB} = 9,4 \text{ MB}$ (Megabyte)

komprimiert (JPEG, Kompressionsrate kappa = 0,17): $G_{\text{kompr}} = G_{\text{unkom}} \cdot \text{kappa} = 9,4 \cdot 0,17 \text{ MB} = 1,6 \text{ MB}$

- 2) Ein Zeitungsbild mit dieser Auflösungsdichte von 220 dpi = 87 px/cm wird aus einer Sehentfernung von:

$$L = 3.438 \cdot \text{vis} / A_p = 3.438 \cdot 1,0 / 87 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

"pixelfrei" gesehen.

Standardmonitor

Bildschirmdiagonale $D = 14''$; Auflösung $A = 800 \times 600$ Pixel

Daraus ergibt sich: $V = 4:3$; $\boxed{A_P = 72 \text{ dpi}} = 28,3 \text{ px/cm}$;

$L(\text{vis} = 0,7) = 3.438 * 0,7 / 28,3 \text{ cm} = 85 \text{ cm}$. Bei einer Sehschärfe von 0,7 wird aus einer Entfernung von 85 cm der Bildschirm "pixelfrei" gesehen.

Monitordarstellung eines Digitalbildes

Ausgangsdaten: Bildeigenschaften auf der Festplatte

Nach Betriebssystem Windows:

Dateiname: savoy10.jpg

Dateigröße (komprimiert): 191 kB

Nach Bildanzeigeprogramm "IrfanView":

Bildgröße: 500 x 376 px

Farbtiefe: 24 bpp

Daraus berechnet sich:

Seitenverhältnis: $V = 500/376 = 1,33 = 4:3$

Dateigröße (unkomprimiert): $G = 500 * 376 * 3 / 1024 = 551 \text{ KB}$

Datenreduktionsfaktor: $\rho = 191 * 1024 * 8 / 500 / 376 = 8,3 \text{ bpp}$

Kompressionsrate: $\kappa = 191 / 551 = 35\%$ (auf)

Monitoreigenschaften (LCD)

Spezifikation:

Diagonale: $D = 19'' = 19 * 2,54 \text{ cm} = 48,3 \text{ cm}$

maximale Auflösung durch Grafikkarte: 1280 x 1024

Berechnungen:

Seitenverhältnis: $V = 1280/1024 = 1,25$

geometrische Bildgröße: $B = 1,25 / \text{SQRT}(1 + 1,25^2) * 48,3 \text{ cm} = 37,7 \text{ cm}$

$H = 1 / \text{SQRT}(1 + 1,25^2) * 48,3 \text{ cm} = 30,2 \text{ cm}$

maximale Auflösungsdichte: $A_{PG} = 1280 / 37,7 = 34 \text{ px/cm} = 86,2 \text{ ppi} = 86,2 \text{ dpi}$
(Geräteauflösung)

Punktabstand: $d = 1/34 \text{ cm} = 0,29 \text{ mm}$

Bilddarstellung auf dem Monitor (mit IrfanView)

Ansicht Originalgröße:

Bildgröße: $B = 500/34 \text{ cm} = 14,7 \text{ cm}$; $H = 376/34 \text{ cm} = 11,1 \text{ cm}$

Bildauflösung: $A_{PB} = 500/14,7 = 34 \text{ px/cm} = A_{PG}$

(Bildauflösung = Geräteauflösung)

Pixelgröße: $d = 1/34 \text{ cm} = 0,29 \text{ mm}$ **(Pixelgröße = Punktabstand (Lochabstand))**

Sehabstand ($\text{vis} = 0,7$): $L = 3438 * 0,7 / 34 \text{ cm} = 71 \text{ cm}$

Vollbildmodus:

Zoom; $37,7/14,7 = 256\%$

Bildauflösung: $A_{PB} = 500/37,7 \text{ px/cm} = 13,3 \text{ px/cm} = 33,7 \text{ ppi}$

Pixelgröße: $d = 1/13,3 \text{ cm} = 0,75 \text{ mm}$

Sehabstand ($\text{vis} = 0,7$): $L = 3438 * 0,7 / 13,3 \text{ cm} = 181 \text{ cm}$

Zoom 18702 x 14064 (3740%)

Bildgröße: $B = 14,7 * 18403 / 500 \text{ cm} = 560 \text{ cm}$; $H = 11,1 * 14064 / 376 \text{ cm} = 415 \text{ cm}$

Bildauflösung: $A_{PB} = 500/560 \text{ px/cm} = 0,89 \text{ px/cm}$

Pixelgröße: $d = 1/0,89 \text{ cm} = 560/500 \text{ cm} = 1,1 \text{ cm}$

Anzahl der dots: $p_d = 34 * 1,1 \text{ dots} = 37 \text{ dots}$

1 Pixel (Quadrat) besteht aus $37^2 \text{ dots} = 1369 \text{ dots} \Rightarrow 1369 \text{ dpp}$ (dots per pixel)

Punktiefe (Dottiefe): $a = (A_{PG}/A_{PB})^2 = (34/0,89)^2 = 1459 \text{ dpp}$ (Rundungsfehler)

Literatur

- [1] H.-P. Gumm/M. Sommer, Einführung in die Informatik, Oldenbourg München, 2000
- [2] H. Ernst, Grundkurs Informatik, Vieweg+Teubner Wiesbaden, 2008
- [3] H.A. Stuart/G. Klages, Kurzes Lehrbuch der Physik, Springer Berlin, 1984
- [4] K. Bruns/K. Meyer-Wegener, Taschenbuch der Medieninformatik,
Hanser München, 2005
- [5] Brockhaus ◊ Computer und Informationstechnologie, Brockhaus Mannheim, 2003
- [6] L. Velho/A.C. Frery/J. Ggomes, Image Processing for Computer Graphics and Vision,
Springer London, 2008
- [7] C. Künne, Bilder drucken, Addison-Wesley München, 2007
- [8] T. Waldraff, Digitale Bildauflösung, Springer Berlin, 2004
- [9] J. Böhringer/P. Bühler/P. Schlaich, Kompendium der Mediengestaltung,
Springer Berlin, 2006